Implications Philosophiques
Espace de recherche et de diffusion

Publié le 12 décembre 2016
url : http://www.implications-philosophiques.org/?p=8692

Mettre de l'eau dans du vin, un paradoxe de l'indifférence?

Léo Gerville-Réache - IMS-Cognitique-UMR5218 - Université de Bordeaux

Résumé : Cet article revient sur le paradoxe du mélange Vin/Eau (wine/water paradox), considéré comme un argument de poids (et de plus) contre le principe d'indifférence de Keynes. Après avoir présenté et analysé les quelques solutions proposées dans la littérature, nous développons un argumentaire conduisant à proposer une distribution de probabilité essentiellement indifférente.

1) Introduction

> Le principe d'indifférence (Keynes 1921), affirme que "*s'il n'y a aucune raison connue pour attribuer à notre sujet une alternative plutôt qu'une autre, parmi plusieurs alternatives possibles, alors, ces alternatives ont une probabilité égale relativement à notre connaissance. Des probabilités égales doivent donc être assignées à chacun des différents arguments, s'il n'y a pas de raison de leur assigner des probabilités inégales.*"

Depuis toujours, le principe d'indifférence est l'objet de nombreuses critiques émises entre autre par Von Mises, Von Kries, Borel, Bertrand, Buffon… L'attribution de probabilités égales a priori semble problématique pour beaucoup. Ce principe est en réalité, un principe premier de modélisation. Il guide la construction de l'espace probabilisé associé à un problème d'incertitude totale (entropie maximale). Le remettre en cause sans véritable raison, et ne pas l'utiliser, c'est se priver de tout un ensemble de modélisations et donc de décisions. On doit l'interpréter comme une manière d'attribuer des probabilités a priori et non comme le moyen de définir de "vraies probabilités".

Parmi les arguments visant à remettre en cause ce principe, on trouve de nombreux "paradoxes". Celui de la corde de Bertrand est certainement le plus connu. Il semble cependant qu'une solution se dégage dès que l'on confronte les diverses modélisations à l'expérimentation de l'aiguille de Buffon (voir par exemple Gerville-Réache 2016) ou lorsque l'on liste les nécessités d'invariance (voir Jaynes 1973). Un autre paradoxe, sans doute plus délicat dans la mesure où aucune expérimentation n'est envisageable, est celui du mélange Vin/Eau. Son énoncé est d'une grande simplicité mais les tentatives de résolutions nous entrainent dans des analyses aussi mathématiques que philosophiques.

> **Le paradoxe Vin/Eau :** *Un liquide contient un mélange de vin et d'eau tel que le rapport Vin/Eau est compris entre 1/3 et 3. Quelle est la probabilité que le rapport (en volume) Vin/Eau soit inférieur à 2?*

Selon le principe d'indifférence, il semble que nous devions mettre une loi uniforme continue sur le rapport Vin/Eau : Vin/Eau ~ U[1/3;3]. Dans ce cas, pour x compris entre 1/3 et 3, on a : $P_{V/E}(Vin/Eau < x) = (3x-1)/8$. *D'où on conclut que* $P_{V/E}(Vin/Eau < 2) = 5/8$.

Mais pourquoi ne pas mettre cette loi uniforme pour le rapport Eau/Vin (i.e. Eau/Vin ~ U[1/3;3])? Cela revient à prendre pour distribution de probabilité pour le rapport Vin/Eau la loi 1/U[1/3;3]. Dans ce cas, pour x compris entre 1/3 et 3, on obtient: $P_{E/V}(Eau/Vin < x) = (3/x-1)/8$. *On conclut ici que* $P_{E/V}(Vin/Eau < 2) = 15/16$.

Aussi mettre une loi uniforme sur le rapport Vin/Eau n'est pas équivalemment à mettre une loi uniforme sur le rapport Eau/Vin. Tel est le paradoxe.

De nombreux chercheurs se sont intéressés à ce paradoxe, sans que l'on puisse clairement savoir qui en est à l'origine (voir Deakin 2006). Il semble que peu d'entre eux aient proposé une solution. Une solution, c'est à dire une loi de probabilité qui ferait disparaitre le paradoxe et réhabiliterait (pour un temps) le principe d'indifférence. Deux propositions de distribution semblent prendre actuellement leur place dans le débat. La première, due à Mikkelson en 2004, débouche sur la proposition $P_M(Vin/Eau < 2) = 5/6$. La seconde, proposée par Burock en 2005, débouche sur une probabilité d'approximativement 0,764.

Il est étonnant que si peu d'auteurs se soient lancés dans les propositions de solution. En effet, comme nous allons le voir, le nombre de solutions semble infini et de ce point de vue, on aurait pu s'attendre à une multitude de propositions de solution. A contrario, si le nombre de solutions est infini, quel intérêt y aurait-il a en proposer une particulière?

Dans cet article, nous revenons sur les solutions proposées et tentons de préciser la pertinence de chacune. Enfin, nous montrons que, bien que le nombre de solutions semble infini, l'application stricte du principe d'indifférence impose en réalité une solution vraisemblablement unique. En effet, les contraintes sur la loi de probabilité à mettre sur le rapport des deux liquides sont en définitive plus nombreuses que celles qui ont été identifiées jusqu'à présent. Ce qui reste une énigme est que la valeur de la probabilité recherchée serait alors de 15/16, celle-là même que l'on obtenait en supposant une loi uniforme sur le rapport Eau/Vin!

2) Les clefs de base de la résolution

Le principe d'indifférence nous impose en réalité une multitude d'équiprobabilité. En proposant de mettre une loi uniforme sur le rapport Vin/Eau : Vin/Eau ~ U[1/3;3], on oublie par exemple qu'il est nécessaire, pour respecter ce principe, que la loi de probabilité soit telle que :

$$P(Vin/Eau < 1) = P(Eau/Vin > 1) = 1/2.$$

Or, cette modélisation ne satisfait pas cette contrainte du principe d'indifférence parce que :

$$P_{V/E}(Vin/Eau < 1) = (3*1-1)/8 = 1/4.$$

NB : les lois de probabilités considérées étant continues, on a $P(X < x) = P(X \leq x)$.

Aussi, en mettant une loi uniforme sur le rapport Vin/Eau, on n'est pas indifférent. En particulier, il n'y a qu'une chance sur quatre que le volume de Vin soit inférieur au volume d'eau. Voilà un mélange probablement trop alcoolisé....

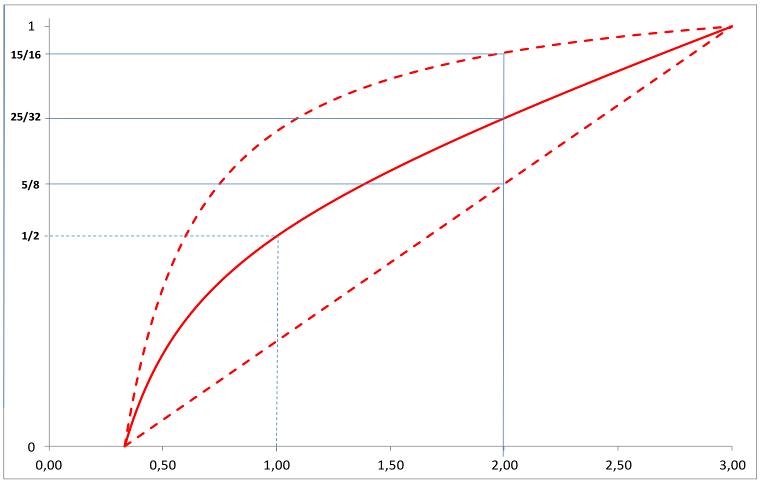
Afin de régler ce problème, on peut moyenner les deux distributions uniformes en arguant qu'elles sont finalement également probables (principe d'indifférence). On obtient alors :

$$P_A(Vin/Eau < x) = 1/2*P_{V/E}(Vin/Eau < x) + 1/2*P_{E/V}(Eau/Vin > 1/x) = (3x-3/x+8)/16.$$

La probabilité recherchée vaut alors $P_A(Vin/Eau < 2) = 25/32$. On peut alors noter que l'on a bien:

$$P_A(Vin/Eau < 1) = P_A(Eau/Vin > 1) = 1/2.$$

La représentation graphique ci-après montre la forme de ces trois distributions. Si les deux premières sont à proscrire en vertu de la surreprésentation de l'un des deux liquides, la distribution moyenne ne souffre pas de cette nécessité imposée par le principe d'indifférence.



Distributions $P_{V/E}$, $P_{E/V}$ et P_A

A ce stade de la réflexion, la distribution P_A (i.e. $P_A(\text{Vin/Eau} < x) = (3x\text{-}3/x+8)/16$) est un candidat satisfaisant. Pour autant, il existe d'autres candidats redoutables...

La distribution de Mikkelson (2004) : L'idée de base consiste à dire par convention que le volume Vin+Eau = 1. On remplit alors ce volume constant avec du Vin (resp. de l'Eau) selon une loi uniforme U[1/4;3/4] et on complète le volume à concurrence d'un volume de 1 par de l'Eau (resp. du Vin). Les deux volumes de liquide suivent alors loi uniforme U[1/4;3/4] et le rapport des deux liquides est bien entre 1/3 et 3. La probabilité recherchée vaut $P_M(\text{Vin/Eau} < 2) = 5/6$.

Ce que ne précise pas Mikkelson, c'est la fonction de probabilité d'un tel rapport. Les volumes étant dépendants via la contrainte Vin+Eau = 1, la loi du rapport est la loi de probabilité de $Y/(1\text{-}Y)$ où Y est une variable aléatoire uniforme U[1/4;3/4]. Après calcul, on obtient que:

$$P_M(\text{Vin/Eau} < x) = 3/2\text{-}2/(x+1), \text{ pour } x \text{ entre } 1/3 \text{ et } 3.$$

La distribution de Burock (2005) : L'idée de base est de travailler sur la loi conjointe des rapports Vin/Eau et Eau/Vin en remarquant que Vin/Eau = 1/(Eau/Vin). Il propose de mettre alors une loi uniforme sur la longueur de l'arc (Arc length) de la courbe $f(x)=1/x$ pour la densité jointe définie entre les extrémités (1/3, 3) et (3, 1/3). Il obtient alors, pour x entre 1/3 et 3 :

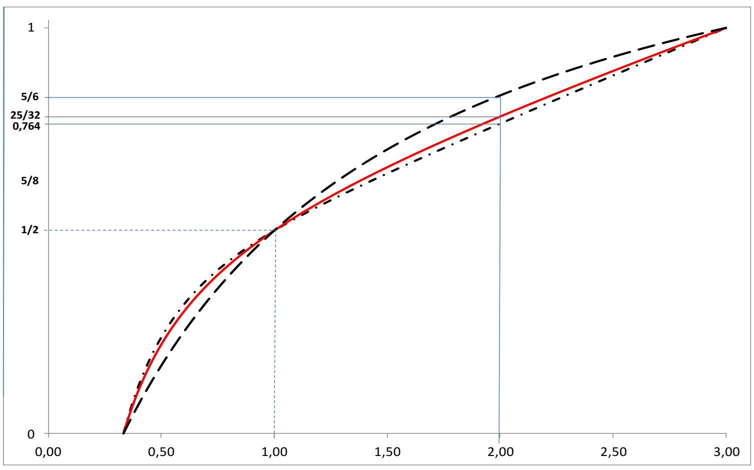
$$P_B(\text{Vin/Eau} < x) = \int_{1/3}^{x} \sqrt{1 + 1/u^4 du} \,/ \int_{1/3}^{3} \sqrt{1 + 1/u^4 du}$$

Cette probabilité se calcule numériquement et la courbe obtenue est présentée sur le graphique ci-après.

NB: avec,

$$\int_{1/3}^{3} \sqrt{1 + 1/u^4 du} \approx 4{,}2932,$$

la probabilité recherchée vaut $P_B(\text{Vin/Eau} < 2) \approx 0{,}764$.



Distribution de Mikkelson ($P_M(2)$=5/6), de Burock ($P_B(2)$=0,764) et P_A

Le principe d'indifférence impose en réalité dans ce problème que :

$$P(\text{Vin/Eau} < x) + P(\text{Vin/Eau} < 1/x) = 1, \text{ pour } x \text{ entre } 1/3 \text{ et } 3.$$

Les trois distributions P_A, P_M et P_B satisfont cette contrainte et en l'état, il semble bien difficile de se prononcer en faveur de l'une ou l'autre. Pourtant, aucune des trois n'est en réalité satisfaisante. En effet, le principe d'indifférence est encore bien plus exigeant que cela...

3) Des clefs supplémentaires

Si l'on réfléchit d'avantage au principe d'indifférence, celui-ci devrait conduire ici à des contraintes supplémentaires. Celles-ci s'expriment en termes de densité de probabilité.

- En premier lieu, l'indifférence impose que la valeur de la densité en 1/3 et en 3 soit identique. En effet, aucune asymétrie à ce niveau ne serait justifiable.
- De plus, cette densité doit tendre vers 0 lorsque le rapport tend vers 1/3 ou 3 car si tel n'était pas le cas, la valeur de la densité en 1/3 et en 3 serait une constante strictement positive. Mais quelle valeur serait alors justifiable au nom du principe d'indifférence?
- Enfin, la densité doit être continue entre 1/3 et 3 car il n'y a aucune raison de discontinuité sur l'intervalle des mélanges possibles.

Ces nécessités conduisent à rechercher une densité de probabilité $f(x)$ continue sur [1/3,3] telle que:

$$f(1/3)=f(3)=0.$$

Les densités de P_A, P_M et P_B pour x entre 1/3 et 3 sont les suivantes :

- densité "Average" :

$$\frac{d}{dx}P_A(\text{Vin/Eau} < x) = (3 + 3/x^2)/16,$$

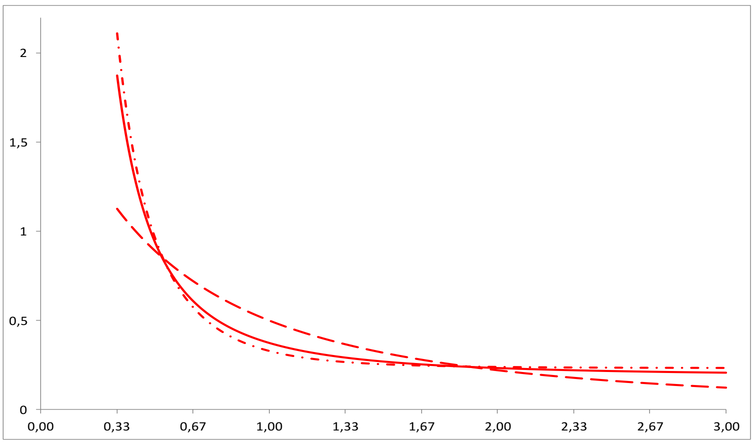
- densité de Mikkelson :

$$\frac{d}{dx}P_M(\text{Vin/Eau} < x) = 2/(x+1)^2,$$

- densité de Burock :

$$\frac{d}{dx}P_M(\text{Vin/Eau} < x) = \frac{1}{4{,}2932}\sqrt{1 + 1/x^4}\,.$$

Le graphique ci-après représente ces densités. Il est clair que $f(1/3) \neq f(3)$ et $f(1/3) \neq 0$, et cela pour les trois densités. De plus, ces trois distributions candidates nous disent curieusement que la probabilité d'appartenir à un petit intervalle est maximale quand le rapport Vin/Eau est proche de 1/3.



Les densités de P_A, P_M et P_B

A ce stade, on peut déjà rejeter ces trois propositions de solutions. Pour autant, un bon candidat doit également s'affranchir d'une contrainte supplémentaire. Puisqu'il se doit que $f(1/3)=f(3)=0$, la densité possède au moins un maximum. En revanche, il n'y a aucune raison que cette densité en possède plusieurs. Aussi, ce maximum ne peut être que pour un rapport Vin/Eau=1 car une fois encore, il n'y a aucune raison que celui-ci se trouve en une autre valeur du rapport.

Le principe d'indifférence s'applique *in fine* en éliminant les lois de probabilité qui ne respecteraient pas les contraintes. Pour résumer, les contraintes identifiées dans ce problème sont les suivantes :

- P(Vin/Eau < 1) = P(Eau/Vin > 1) = 1/2,
- P(Vin/Eau < x) + P(Vin/Eau < 1/x) = 1, pour x entre 1/3 et 3,
- $f(1/3) = f(3) = 0$,
- $f(1) = max\, f(x)$.

Malgré ces contraintes, il existe encore une infinité de solutions! Il convient alors de chercher une solution en partant, comme pour les distributions P_A, P_M et P_B, d'un mélange "physiquement uniforme". Plus précisément, proposer un mélange Vin-Eau sur la base de lois uniformes qui, raisonnablement indifférent a priori, vérifie les contraintes multiples du principe l'indifférence.

4) Une distribution indifférente

Partons donc de la réflexion sur la fabrication du mélange. Supposons que nous disposions d'une bouteille de vin (75cl) et d'une bouteille d'eau (75cl). Pour que le mélange ait un rapport Vin/Eau entre 1/3 et 3, nous pouvons mettre 25cl de chaque liquide puis verser simultanément de l'eau et du vin jusqu'à ce que l'une des deux bouteilles soit vide. Aussi, le volume de vin sera compris en 25 et 75cl, comme le volume d'eau. N'ayant pas d'autre information, les volumes d'eau et de vin seront modélisés par des variables aléatoires uniformes indépendantes U[1/4;3/4]. Aussi, et sans perte de généralité, on pose :

$$\text{Vin/Eau} \sim U[1;3]/U[1;3].$$

La fabrication de ce mélange semble être a priori conforme au principe d'indifférence. Pour autant, il convient maintenant de vérifier si les contraintes sont bien respectées.

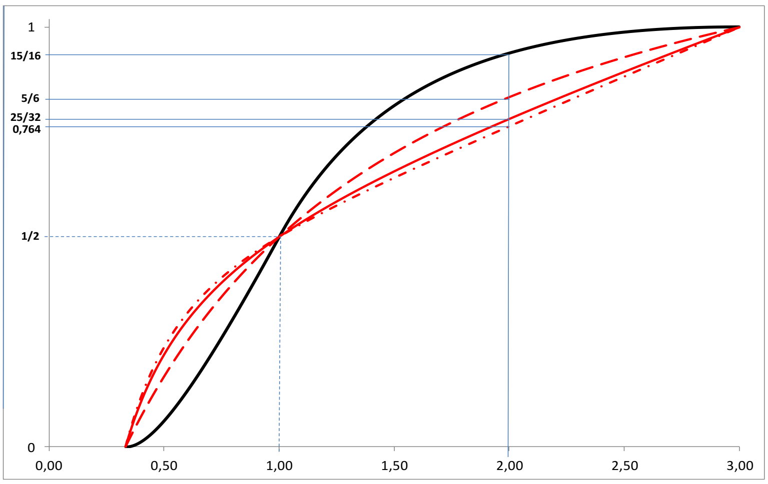
La loi de probabilité du rapport Eau/Vin est la même que la loi de probabilité du rapport Vin/Eau. On a symétrie et invariance (aux unités de mesure) et on a bien un rapport Vin/Eau entre 1/3 et 3. Après calcul, la distribution de probabilité est donnée par :

$$P_{\#}(\text{Vin/Eau} < x) = x/8*(3-1/x)^2 \text{ si } 1/3 \leq x \leq 1$$

et

$$P_{\#}(\text{Vin/Eau} < x\,) = 1-x/8*(3/x-1)^2 \text{ si } 1 < x \leq 3.$$

La fonction de répartition est présentée sur le graphique suivant. On peut lire que la probabilité recherchée vaut $P_{\#}$(Vin/Eau < 2) = 15/16. C'est une étonnante surprise! En effet, il n'y a aucune raison de prime abord que la valeur de cette distribution au point 2 soit égale à celle de la distribution d'une variable aléatoire 1/U[1/3;3] au même point 2. On peut même se demander si la valeur 2 aurait été choisie intentionnellement? Voilà une véritable énigme...



Distribution $P_{\#}$

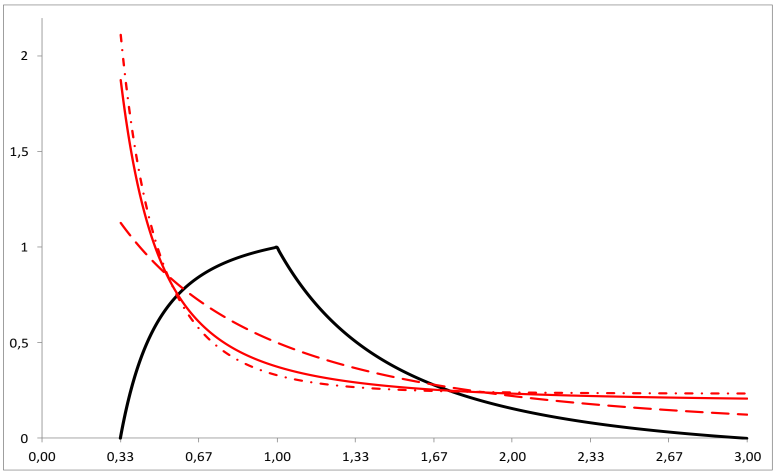
La fonction $P_\#$ vérifie $P_\#(\text{Vin/Eau} < x) + P_\#(\text{Vin/Eau} < 1/x) = 1$, pour x entre 1/3 et 3. La densité de probabilité est la suivante :

$$f_\#(x) = (9-1/x^2)/8 \text{ si } 1/3 \leq x \leq 1$$

et

$$f_\#(x) = (9/x^2-1)/8 \text{ si } 1 < x \leq 3.$$

La densité $f_\#$ vérifie $f_\#(1/3) = f_\#(3) = 0$ et $f_\#(1) = max\ f_\#(x)$. Cette densité, en aileron de requin (shark fin), est représentée sur la graphique ci-après :



La densité $f_\#$

5) Discussion

Construire une distribution de probabilité basée sur le principe d'indifférence n'est pas nécessairement aisée. Lorsque l'on joue à pile ou face, tout le monde s'accorde sur l'équiprobabilité (a priori) des deux issues possibles. Pourtant nous ignorons la réalité de ces probabilités. Plus encore, il est physiquement certain que les probabilités des deux faces de la pièce ne sont pas égales. Aussi, en attendant la quantification de ces probabilités, via une analyse statistique ou physique, l'équiprobabilité est bien la seule modélisation rationalisable.

Dans le paradoxe Vin/Eau, nous ne savons presque rien du processus de fabrication du mélange. La seule information est que le rapport des deux liquides est entre 1/3 et 3. La question est alors de comprendre comment utiliser cette information minimaliste? Bien sûr, on peut toujours décréter qu'avec une information aussi faible, on ne peut rien dire de la probabilité que le rapport Vin/Eau soit inférieur à 2. C'est une manière d'éviter le paradoxe (et de renoncer au principe d'indifférence) mais certainement pas de le résoudre. On retrouve d'ailleurs cette position dommageable pour d'autres paradoxes : les deux enveloppes, les deux portefeuilles...

En réalité, nous utilisons tous le principe d'indifférence, souvent sans le nommer, sans l'identifier. Mais dès qu'il devient délicat de l'appliquer, on le pointe du doigt et décrétons que celui-ci est paradoxal. Le seul paradoxe est là. En fait, ce principe s'applique par élimination des candidats inadmissibles. Aussi, une solution n'est pas nécessairement LA solution. Une solution est une distribution qui passe les "épreuves" de l'indifférence.

Avant de mettre en cause le principe d'indifférence, il est nécessaire de s'assurer que celui-ci a été utilisé correctement. Il faut reconnaitre que cela est parfois difficile mais pas nécessairement impossible.

En mettant de l'eau dans ce vin, nous nous sommes effectivement compliqués la vie. C'est sans doute pour cela que la tradition viticole l'interdit. D'un autre côté, il est parfois recommandé de mettre de l'eau dans son vin... En attendant que d'autres distributions surgissent éventuellement et mettent en défaut celle proposée ici, il semble bien que la distribution issue du rapport de deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle [1;3] soit actuellement la plus respectueuse du délicat mais nécessaire principe indifférence.

Bibliographie

Marc Burock, *Indifference, Sample Space, and the Wine/Water Paradox*, http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00002487/01/Indifference_new_...Burock_2005.pdf, 2005.

Michael Deakin, *The Wine/Water Paradox: background, provenance and proposed resolutions*, The Australian Mathematical Society Gazette, 200-205, 2006.

Léo Gerville-Réache, *Bertrand, Buffon, Keynes : L'enseignement du concept de hasard et du principe d'indifférence en statistique*, 48ème Journées de statistique, Montpellier, 6p. 2016.

Edwin Jaynes, *The well-posed problem*, Foundations of Physics 3, 477-492, 1973.

John Keynes, Treatise on Probability, *Macmillan London*, 1921.

Jeffrey Mikkelson, *Dissolving the wine/water paradox*, Brit. J. Phil. Sci. 55, 137-145, 2004.